Обозначим через $D(t)=\| z_1(t)-z_2(t)\|$ расстояние между двумя точками в *фазовом пространстве*, принадлежащими разным траекториям $z_1(t)$ и $z_2(t)$ в момент времени t. Пусть система совершает финитное движение в фазовом пространстве. Такая система наз. локально неустойчивой, если для траекторий, близких в нач. момент времени, существует направление, в к-ром

$$D(t)=D(0)\exp(h_0 t),\ h_0>0 \tag{1}$$

(рис. 1, *а*). Свойство (1) имеет место для множества нач. условий, имеющих конечную меру в фазовом пространстве системы, и при сколь угодно малых возмущениях нач. условий (т. е. при $D(0)\to 0$). Поэтому локальную неустойчивость называют также чувствительностью к возмущению нач. условий.

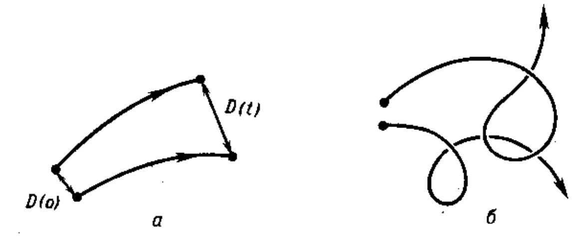

Рис. 1.

Вследствие финитности движения (конечности объёма Γ фазового пространства, занимаемого траекториями) траектории не могут разойтись на расстояния, превышающие характерный размер области Γ, и начинают запутываться (рис. 1, *б*). Как следствие, системы с локальной неустойчивостью обладают свойством перемешивания.

Это свойство, введённое в статистическую физику в работах Дж. У. Гиббса (J. W. Gibbs), является более тонким, чем свойство эргодичности. Пусть $z(t)$ — фазовая точка, характеризующая состояние системы в момент времени t, $z_0=z(0)$, $f(z)$ — произвольная ф-ция от z, S_t — эволюционный оператор, $S_t z(0)=z(t)$. Движение наз. эргодическим, если независимо от выбора момента времени t

$$\bar{f}=\langle f\rangle, \tag{2}$$

где среднее по времени $\bar{f}$ и фазовое среднее $\langle f\rangle$ от ф-ции f определены соотношениями

$$\bar{f}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f[z(t)]\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f[S_t z_0]\,dt,$$
$$\langle f\rangle=\int_\Gamma f(z)\,d\Gamma(z). \tag{3}$$

Здесь $d\Gamma(z)$ — элемент объёма фазового пространства в окрестности точки z. В определении учтена независимость $\bar{f}$ от выбора t (второе равенство в первой строке).

Пусть имеются две произвольные ф-ции $f(z)$ и $g(z)$. Тогда движение наз. перемешивающим, если

$$\lim_{T\to\infty} R_T(f, g)=0, \tag{4}$$

где $R_T(f, g)$ — корреляц. ф-ция, определяемая через фазовые средние равенством

$$R_T(f,g)=\int_\Gamma f(S_T z)g(z)\,d\Gamma(z)-\Big(\int_\Gamma f(z)\,d\Gamma(z)\Big)\Big(\int_\Gamma g(z)\,d\Gamma(z)\Big)=$$
$$=\langle f(S_T z)g(z)\rangle-\langle f\rangle\langle g\rangle. \tag{5}$$

Из наличия перемешивания автоматически следует свойство эргодичности; обратное, вообще говоря, неверно.

Эфф. перемешивание элемента фазового объёма $\delta\Gamma$ происходит за время $\tau\sim 1/h_0$. Пример эволюции «фазовой капли», иллюстрирующий свойства локальной неустойчивости и перемешивания, показан на рис. 2. Роль локальной неустойчивости в возникновении перемешивания была выяснена Н. С. Крыловым.

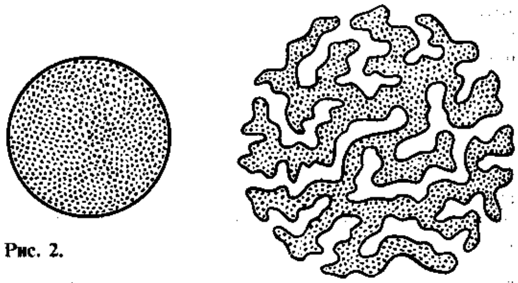

Рис. 2.

Эволюция динамич. систем с перемешиванием различна в зависимости от того, является система гамильтоновой или диссипативной.

I. Гамильтоновы системы

В этом случае фазовый объём не меняется: $\delta\Gamma_t=\delta\Gamma_0$ ($\delta\Gamma_0$ — фазовый объём в нач. момент времени; $\delta\Gamma_t$ — фазовый объём той же «капли» в момент времени t). Однако структура «фазовой капли» изменяется (рис. 2); «капля» принимает неправильную, амёбообразную форму и постепенно заполняет все области фазового пространства за счёт вытягивания и утоньшения отростков. Следовательно, эфф. объём капли растёт, однако в нём появляется большое кол-во пустот. Для характеристики «раздувания» капли вводится огрубление фазового объёма. Пусть масштаб огрубления есть ε (ε имеет размерность Γ). Это значит, что все точки капли следует заменить на сферы объёмом ε. Объединение всех таких сфер даст огрублённый объём фазовой капли $\delta\tilde{\Gamma}_t$. В отличие от истинного объёма $\delta\Gamma_t$ величина $\delta\tilde{\Gamma}_t$ меняется со временем за счёт роста объёма пустот в огрублённой капле. Выберем нач. объём фазовой капли $\delta\Gamma_0=\varepsilon$ (при точности огрубления ε меньший объём не имеет смысла).
Величина

$$h=\lim_{t\to\infty}\lim_{\delta\Gamma_0\to 0}\frac{1}{t}\frac{\delta\tilde{\Gamma}_t}{\delta\Gamma_0} \tag{6}$$

наз. **энтропией Колмогорова — Синая** (или **К-энтропией, КС-энтропией**). Величина h не зависит от способа разбиения фазового пространства и огрубления и характеризует усреднённый по объёму инкремент неустойчивости h_0 в (1), $h=\langle h_0\rangle$. Системы с хаосом имеют ненулевую К-энтропию $h>0$. Такие системы (т. е. системы с перемешиванием) наз. **К-системами**.

Вследствие перемешивания фазовой жидкости происходит «забывание» нач. условий. В данном элементе объёма $\delta\Gamma$ могут присутствовать траектории из разл. областей всего допустимого фазового объёма Γ, если только время наблюдения t достаточно велико: $t\gg\tau\sim 1/h$. Поэтому время τ может быть интерпретировано как время забывания нач. условий или время перемешивания.

Переход к хаосу. Гамильтонова система с N степенями свободы описывается системой $2N$ ур-ний движения. Имеет место теорема Лиувилля. Пусть система обладает N независимыми интегралами движения $I_1, I_2, \ldots, I_N$, коммутирующими между собой: $\{I_i, I_k\}=0$, $i, k=1, 2, \ldots, N$ ($\{\ldots\}$ — скобки Пуассона). Тогда: 1) траектории лежат на N-мерном торе (пример для $N=2$ показан на рис. 3); 2) движение условно-периодично и характеризуется N час-

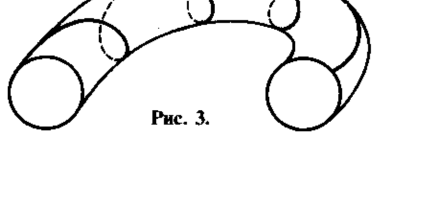

Рис. 3.